Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 16 — Musterlösung

Hinweis: Für die Aufgaben 1 und 2 darf weiterhin ohne Beweis benutzt werden, dass die Quadratwurzel monoton wachsend ist.

Aufgabe 1: *(1+2 Punkte)* Betrachte die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit

$$a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \quad \text{für } n \geq 1\,.$$

(a) Zeige, dass $a_n^2 \geq 2$ für alle $n \geq 2$ gilt.

(b) Beweise, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

Hinweis: Zeige, dass $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist.

Lösung.
Klarstellung: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besteht zwar aus rationalen Zahlen, $a_n \in \mathbb{Q}$, wird in der Aufgabe, insbesondere in Teil (b), aber als Folge in $\mathbb{R}$ betrachtet.

(a) Für $n = 2$ ist $a_2 = \frac{3}{2}$ und die Aussage folgt sofort. Für $n > 2$ haben wir wegen der Rekursionsformel für a_n:

$$a_n^2 - 2 = \left(\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}\right)^2 - 2 = \left(\frac{a_{n-1}}{2} - \frac{1}{a_{n-1}}\right)^2 = \frac{(a_{n-1}-1)^2}{4a_{n-1}^2} \geq 0\,.$$

(b) Für $n \geq 2$ ist

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - a_n = \frac{2 - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

und damit ist $(a_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend (beachte aber, dass $a_2 - a_1 = \frac{3}{2} > 0$). Die Folge $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist also beschränkt und monoton fallend. Damit ist $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent (an dieser Stelle ist die Klarstellung von oben wichtig). Also konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir bezeichnen

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Wegen der in Teil (a) gezeigten Ungleichung gilt $a \geq \sqrt{2}$. Wir müssen noch zeigen, dass auch $a \leq \sqrt{2}$ gilt, also $a = \sqrt{2}$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da aus der Konvergenz folgt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq N$

$$a_n - a_{n+1} < \varepsilon$$

gilt, und deshalb auch

$$a_n - \varepsilon < a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}.$$

Also ist, für $n \geq N$,

$$\frac{a_n^2 - 2}{2a_n} = \frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n} < \varepsilon$$

und für den Grenzwert somit $a^2 \leq 2$. Also ist der Grenzwert tatsächlich $a = \sqrt{2}$.

■

Aufgabe 2: *(2+2 Punkte)* Für positive reelle Zahlen $a > 0$ und $b > 0$ definieren wir zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 := (a+b)/2$, $b_1 := \sqrt{ab}$ und

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{sowie} \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{für } n \geq 1.$$

(a) Zeige die Ungleichungen

$$a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Beweise, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und denselben Grenzwert haben.

Lösung.

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is eine Folge geometrischer Mittel, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge arithmetischer Mittel. Nach der in der Vorlesung gezeigten Proposition gilt also für $n \in \mathbb{N}$, dass

$$a_{n+1} \geq b_{n+1}.$$

Außerdem gilt wegen dieser Ungleichung auch, dass

$$a_n = \max(a_n, b_n) \geq a_{n+1} \quad \text{und} \quad b_n = \min(a_n, b_n) \leq b_{n+1},$$

für $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Behauptung von Teil (a) gezeigt.

(b) Aus den in Teil (a) gezeigten Ungleichungen folgt sofort, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist. Die Folgen sind nach der Ungleichung auch beschränkt, weil a_1 eine obere Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, und b_1 entsprechend eine untere Schranke für beide Folgen. Also konvergieren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir bezeichnen die Grenzwerte mit

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n\,, \quad \text{und} \quad \beta := \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Wir beweisen nun $\alpha = \beta$. Dazu verwenden wir die Rechenregeln, die wir bei der Verknüpfung von Folgen gelernt haben. Wir erhalten

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

und damit $\alpha = \beta$.

■

Aufgabe 3: *(3 Punkte)* Für $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ sei die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_n := \frac{1}{3}\left(2a_{n-1} + a_{n-2}\right) \qquad \text{für } n \geq 3.$$

Vermute und beweise per Induktion nach n eine Formel für die Differenzen

$$a_n - a_{n-1} \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Zeige damit, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Bestimme den Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hinweis: Weihnachtsaufgabe.

Lösung. Wir berechnen die Differenz $a_n - a_{n-1}$ für kleine $n \geq 2$, um die Formel zu vermuten:

$$\begin{aligned}
n = 2: &\qquad a_n - a_{n-1} = a_2 - a_1 \\
n = 3: &\qquad a_n - a_{n-1} = a_3 - a_2 = \frac{1}{3}(2a_2 + a_1) - a_2 = \frac{-a_2 + a_1}{3} \\
n = 4: &\qquad a_n - a_{n-1} = a_4 - a_3 = \frac{1}{9}(7a_2 + 2a_1) = \frac{1}{3}(2a_2 + a_1) - a_2 = \frac{a_2 - a_1}{9}
\end{aligned}$$

Wir vermuten deshalb die Formel

$$a_n - a_{n-1} = \frac{(-1)^n\,(a_2 - a_1)}{3^{n-2}} \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Wir beweisen die Formel nun mittels Induktion über n. Den Induktionsanfang haben wir für $n = 2$ bereits gezeigt. Als Induktionsvoraussetzung (IV) nehmen wir jetzt an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$a_n - a_{n-1} = \frac{(-1)^n\,(a_2 - a_1)}{3^{n-2}}.$$

Den Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$ zeigen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{3}(2a_n + a_{n-1}) - a_n \\
&= \frac{-1}{3}\,(a_n - a_{n-1}) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{-1}{3}\,\frac{(-1)^n(a_2 - a_1)}{3^{n-2}} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(a_2 - a_1)}{3^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Formel für alle $n \geq 2$ gezeigt.
Um die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu beweisen, schreiben wir die Formel in der Form

$$\begin{aligned}
a_n &= a_n + \sum_{k=2}^{n-1}(a_{n-1} - a_{n-1}) \\
&= a_n - a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 \\
&= a_1 + (a_2 - a_1)\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{3^{k-2}}.
\end{aligned}$$

Wir beobachten, dass

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{k-2}} = \sum_{k=0}^{n-2} q^k$$

mit

$$q = -\frac{1}{3}.$$

Es gilt also $|q| < 1$ und mit Teil (c) der Weihnachtsaufgabe folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-2} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{3}{4}.$$

Damit konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Grenzwert ist

$$\lim_{n\to\infty} = a_1 + (a_2 - a_1) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{k-2}} = a_1 + \frac{3}{4}(a_2 - a_1) = \frac{3}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_1.$$

■